Manuel de rédaction et premier devoir
Temps estimé : une grosse dizaine d'heures au total

1 Devoir de vacances :

Méthodologie : (ou comment aborder ce travail ?) *Même si chacun doit trouver sa méthode de travail, je me permet quelques conseils.*
1) Organiser votre temps : en plusieurs sessions, de taille raisonnable, et ne commencer pas le 25 Août.
2) Tricher est inutile : le coefficient de ce travail sera modeste et très inférieur à celui d'un DS. De plus, obtenir la note maximale en DM et échouer en DS ou aux concours me semble un des pires scénarios que l'on puisse espérer.
3) Certaines questions prennent du temps, ce n'est pas grave : n'oubliez pas la devise : "celui qui trouve sans chercher a longtemps chercher sans trouver". Vous ne "perdez pas votre temps" en passant 30 mins sur une question sans trouver la bonne réponse et vos compétences évoluent bien plus lorsque vous trouvez la réponse à une question (que vous n'auriez pas réussi au premier abord) après une recherche courageuse, que lorsque vous donnez une réponse directe issue d'un "par cœur". Néanmoins, si vous bloquez complètement, voici quelques conseils : relire les définitions et le cours associé, engager des pistes sur un brouillon, tester un cas général sur des exemples (uniquement dans le but de mieux comprendre le cas général), mais surtout : ne PAS se jeter sur la correction ou sur internet.

Le devoir suivant, que je ramasserai à la rentrée sera noté.
Néanmoins, je me permet deux remarques : ce ne sont pas que des questions de lycée, certaines vous demanderont plus de temps et de réflexions.
Enfin, la dernière partie est un cours sur la logique que vous devez lire (si, si, j'insiste), nous le reprendrons ensemble à la rentrée, mais aucun rendu n'est attendu sur cette partie,. Vous pouvez bien entendu vous en servir pour réaliser les exercices ci-dessous.
Enfin, je reste à votre disposition par mail (loris-simon.robin@ac-grenoble.fr) en cas de questions, je vous donnerai des indications (uniquement) sans perte de points.

Pour finir, je vous rappelle qu'une journée méthodologique (facultative mais très conseillée) est prévue le mardi 27 août.

Exercice 1 :

1. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 est pair implique n est pair.
2. Soit $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \lambda \leqslant \beta$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda^n + \beta^n = 0 \Leftrightarrow \lambda, \beta \in]0,1[$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = (\sum\limits_{k=1}^{n} k)^2$ (*on pourra utiliser la formule de* $\sum\limits_{k=1}^{n} k$)
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{x}{1+x} \leqslant ln(x+1)$ en introduisant une fonction que l'on étudiera.

Exercice 2 : Une étude de suites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-2x}\,dx$$
.

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$: u_n.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Déterminer la limite de cette suite.

Exercice 3 :

Partie A : Des inégalités

1. Montrer que pour tout réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ (on pensera à un certaine identité remarquable)
2. En déduire que pour tout réels strictement positifs a et b, on a $\dfrac{1}{2}(ln(a)+ln(b)) \leqslant ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Partie B :

On admet que : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
2. Montrer que pour tout $y > 0$, $y + \dfrac{1}{y} \geqslant 2$.
3. Montrer que pour tout $a,b > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+\dfrac{a}{b})^n + (1+\dfrac{b}{a})^n \geqslant 2^{n+1}$.

Exercice 4 : Manipulations autour d'un polynôme

On note $a = \sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{242}{27}}+3}$ et $b = -\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{242}{27}}-3}$.

1. Calculer ab et a^3+b^3 et en déduire que $(a+b)^3 = 6+(a+b)$.
2. On note P la fonction polynômiale définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $P(x) = x^3 - x - 6$.
   (a) Factoriser P (par $x-2$), et donner toutes les racines réelles de P.
   (b) En déduire une valeur réduite de $a+b$.
3. Montrer que $(x-a)(x-b) = x^2 - 2x + \dfrac{1}{3}$ et en déduire une expression simple de a et b à l'aide de la fonction racine carrée.

Exercice 5 : Nombres complexes et trigonométrie

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geqslant 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$

On rappelle les formules trigonométriques suivantes :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ cos(x)^2 + sin^2(x) = 1 \text{ et } cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y).$$

On note $\omega = e^{2i\pi/5}$ et $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z + \bar{z} = 2Re(z)$.
2. En déduire que $\alpha = 2cos(2\pi/5)$ et $\beta = 2cos(4\pi/5)$.
3. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ (à l'aide d'une somme géométrique)
4. Montrer que α et β sont solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$.
5. En déduire la valeur de $cos(2\pi/5)$.
6. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $cos(2a) = 2cos^2(a) - 1$.
7. En déduire la valeur de $cos^2(\pi/5)$ et $sin^2(2\pi/5)$.
8. En déduire la valeur de $cos(\pi/5)$ et $sin(2\pi/5)$.

2 Cours sur la logique pour bien démarrer en CPGE

"Bien rédiger" peut ressembler à du pinaillage, néanmoins il s'agit d'une compétence essentielle en mathématiques.
En effet, lors d'exercices simples, bien rédiger semble se limiter à deux vertus : la première est esthétique et se limite à se conformer aux codes du langage, la seconde est plus importante, il s'agit d'être bien compris par son interlocuteur (dans votre cas, il s'agit souvent de persuader l'interlocuteur de votre compréhension).
Néanmoins, lorsque l'on quitte la facilité, alors la rédaction n'est plus seulement utile à l' "autre", mais devient un point d'appui essentiel pour la résolution d'un exercice.
En effet, si je vous demande de montrer la proposition suivante :

> Si E est un ensemble,
> $$\forall A \in P(E), \forall B \in P(E), (A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B)$$

Il est alors probable que vous optiez pour une des deux stratégies suivantes : la panique, ou le blabla (aucune des deux n'apportera le moindre bénéfice hein...).
En appliquant parfaitement le cours suivant, vous aurez tous les outils pour résoudre cette question et bien d'autres.
Allez, une autre pour la route :

> Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tout $x, y \in \mathbb{R}$: $f(y - f(x)) = 2 - x - y$

Retenez la leçon suivante :

> ***Contrôlez vous, chaque symbole en mathématiques vous engage !***

Dans ce manuel, inspiré de celui de collègues, X sera associé à une mauvaise rédaction, et ✓ à une rédaction valide
Enfin, il peut être pertinent de rappeler que "bien rédiger" correspond souvent à bien utiliser le langage mathématique, mais surtout que celui-ci est construit de manière à rendre plus clair les concepts manipulés : vous vous rendez donc service en l'utilisant proprement.

2.1 Introduction, nomination

2.1.1 Bien introduire un objet

La première règle en mathématiques est que *chaque notation doit être introduite !* Si je vous dis : "il a été admissible à l'X", vous me demanderez : qui est "il" ?
En mathématiques, l'introduction des variables dépend du statut logique de celle-ci. On distingue en particulier deux statuts logiques : l'existence et l'universabilité.
L'existence est associée au quantificateur "il existe" (noté $\exists$). Par exemple, la proposition : "il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$" est vraie.
Le quantificateur universel est le "pour tout" (noté $\forall$). Par exemple, la proposition : "$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 2$" est fausse.

Quand on veut introduire une variable quelconque dans un ensemble E, on peut l'introduire par l'un des deux moyens suivants :

✓Soit $x \in E$, ...
✓Pour tout $x \in E$, ...

Ceci est à différencier de l'introduction : ✓il existe $x \in E$ tel que ...

Ne pas introduire les variables que l'on utilise constitue une faute logique !

En effet, imaginez que l'on écrive :

$$\text{X} \quad sin(x+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\frac{sin(x)+cos(x)}{2}$$

Est ce que cela signifie que cette identité est vraie pour tout x, pour tout x mais uniquement dans un sous ensemble de $\mathbb{R}$, pour un seul x ? Est ce que x est un réel ou autre chose (comme un complexe, ou, pour anticiper la fin de la MP, une matrice) ?

Dans notre cas, c'est le cas pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc une rédaction convenable serait :

$$\checkmark \forall x \in \mathbb{R} \quad sin(x+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\frac{sin(x)+cos(x)}{2}$$

Nous ferons comment démontrer ceci un peu plus bas.

Quelques remarques : On parle de vie de la variable pour décrire l'ensemble des phrases liées à la variable que l'on a introduite. La fin ("mort") d'une variable est implicite.
De plus, il existe de variables dites "muettes" comme dans le cadre des indices de sommes ou des variables d'intégrations. Celles-ci n'ont pas à être introduites et ne servent qu'à l'expression des sommes et des intégrales : comme par exemple dans la proposition : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, k est une variable muette (mais pas n hein).

2.1.2 Bien nommer un objet

Á bien différencier de l'introduction d'une variable, il s'agit d'associer une lettre à une expression déjà existante.
Par exemple, si vous voulez simplifier votre rédaction en remplaçant l'expression $cos(\pi + t_0)$ (ici t_0 a été introduit auparavant) par K vous pouvez écrire :

✓On note k le réel $cos(\pi + t_0)$.
✓On pose $k = cos(\pi + t_0)$.

Attention à plusieurs points néanmoins :

- Il faut bien sûr que la lettre utilisée n'est pas un autre usage dans le contexte.
- Les mots ont un sens précis, on n'utilise pas "pose" à la place de "note" ou vis versa.
- La lettre utilisée est à gauche dans l'égalité de préférence.
- Si t_0 est amené à varier dans l'exercice, il est alors nécessaire d'introduire k_{t_0} ou $k(t_0)$ plutôt que k pour ne pas oublier ce fait. (c'est souvent le cas)
- Enfin, on veillera à ce que la nomination définisse bien une et une seule quantité : par exemple, dire : X " on note x le réel tel que $x^2 = 4$" est interdit (il y a deux valeurs possibles). Par contre, si y est un réel positif introduit précédemment, "✓on note x le réel positif tel que $x^2 = y$" définit bien un unique réel x. Néanmoins, on préférera une nomination plus explicite comme : "✓on pose $x = \sqrt{y}$" ou une nomination ne laissant pas place au doute : "✓on note x l'unique réel positif tel que $x^2 = 4$" (à condition que l'existence et l'unicité de ce réel soit bien garantit).

Le mot "soit" est associé au $\forall$, et les mots "pose" ou "note" à l'existence.

(Cette idée sera approfondie dans les deux premiers points de la partie "modèles de démonstrations")

2.2 Précision logique, liaison

2.2.1 Les propositions logiques

Une proposition logique est une proposition qui prend un des deux caractères de vérité : vrai ou faux (c'est le principe du tiers exclus). Par exemple : f est continue sur $\mathbb{R}$. Vous constaterez que lorsque l'on énonce une proposition logique, on sous-entend que son caractère de vérité est "vrai".
Une démonstration mathématiques est donc constituée vraisemblablement de proposition logique et de connecteur logique. Je vous présente ci-dessous quelques propositions logiques connues et quelques connecteurs logiques.
Enfin vous remarquerez que les propositions logiques peuvent dépendre d'une variable, par exemple : "n est pair".

2.2.2 L'implication et l'équivalence, le et, le ou

Parmi les propositions logiques, certaines sont construites à partir d'autres propositions (dans notre cas 2 autres). Nous nous intéresserons à 4 d'entre elles, classiques.
On notera dans la suite P et Q deux propositions logiques.
La proposition "P et Q" est une proposition qui n'est vraie que si P est vraie ET Q est vraie. Ainsi pour la contredire, il suffit de justifier que P est fausse ou (inclusif) Q est fausse. Vous constaterez qu'une proposition du type "$x \in A \cap B$" correspond à un "et" caché : il s'agit en fait de la proposition "$x \in A$ et $x \in B$".
La proposition "P ou Q" est une proposition qui est vraie que si P est vraie OU (inclusif) Q est vraie. Je rappelle que le "ou" est inclusif signifie que P ou Q est vraie dans le cas où P et Q sont toutes les deux vraie.
Ainsi pour la contredire, il faut justifier que P est fausse Et que Q est fausse. Vous constaterez qu'une proposition du type "$x \in A \cup B$" correspond à un "ou" caché : il s'agit en fait de la proposition "$x \in A$ ou $x \in B$".

Un lien fort peut etre vraie entre le "et" et le "pour tout", le "ou" et le "il existe".
Par exemple, si on dispose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une proposition logique P_n (par exemple "n est premier").
Alors dire "P_0 est vraie et P_1 est vraie et ... et P_100 est vraie" se traduit par : "$\forall n \in [[0, 100]]$, P_n est vraie".
Alors que dire "P_0 est vraie ou P_1 est vraie ou ... ou P_100 est vraie" se traduit par : "$\exists n \in [[0, 100]]$ tel que P_n est vraie".

Regardons maintenant l'implication et l'équivalence.
La proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie si et seulement si : quand la proposition P est vraie, la proposition Q l'est aussi.
Elle n'a évidemment aucun lien avec sa proposition réciproque $Q \Rightarrow P$. (même si des amalgames sont souvent faits dans le langage courant, rendant extrêmement confuses les discussions).
Enfin, $\Rightarrow$ n'est pas un symbole permettant d'"avancer" dans les raisonnements, il ne sert uniquement lors d'énoncé

de propositions logiques (voir partie 3.4)
La proposition $P \Leftrightarrow Q$ peut être vu selon deux points de vues : elle signifie que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraie, ce qui renvient à dire que P et Q possède le même caractère de vérité.
Il est impensable de confondre $P \Leftrightarrow Q$ et $P \Rightarrow Q$, et affirmer $P \Leftrightarrow Q$ vous engage à justifier $P \Rightarrow Q$ ET $Q \Rightarrow P$.
Enfin, deux situations sont à distinguer : si P et Q ne dépendent d'aucun paramètre, alors montrer $P \Leftrightarrow Q$ revient à justifier juste que P et Q sont vraies ou que P et Q sont fausses, ce qui ne demande pas une trop grande réflexion : par exemple la proposition "2 est impaire si et seulement si l'équation $x^2+1=0$ admet une solution réelle" est vraie.
Néanmoins, les situations auxquelles nous sommes principalement confrontées sont celles où les propositions dépendent d'un paramètre variable (qui peut être entier, réel, une fonction, un ensemble ...). Dans ce cas, le raisonnement peut être plus complexe. Justifier $\forall x \in E$ tel que $P_x \Leftrightarrow Q_x$ demande de justifier que pour tout $x \in E$, P_x et Q_x ont le même caractère de vérité.
Par exemple : lorsque vous dites, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2-2x+1 = x+1 \Leftrightarrow x^2-3x=0$, vous affirmez que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2-2x+1=x+1$ et $x^2-3x=0$ ont même caractère de vérité.
On peut continuer l'exemple : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2-2x+1 = x+1 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$.
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2-2x+1=x+1$ et ($x=0$ ou $x=3$) ont même caractère de vérité, ce qui permet bien d'affirmer que l'ensemble des solutions de l'équation $x^2-2x+1=x+1$ (c'est à dire l'ensemble des x tel que $x^2-2x+1=x+1$ soit vraie) est $\{0,3\}$.
Malgré cet exemple, l'usage du symbole $\Leftrightarrow$ dans la preuve d'une équivalence est assez rare (sauf pour les équations et inéquations), et ce dû au fait qu'affirmer $P \Leftrightarrow Q$ ne dit rien sur le caractère de vérité de P ou de Q (cf partie 3.4).

2.2.3 Bien utiliser les connecteurs logiques

Comme vous le verrez ci-dessous, la plupart des méthodes de démonstration nécessite des déductions logiques, et donc nécessite de bien différencier les hypothèses, les conclusions, les justifications, ...
Pour cela, utiliser les connecteurs logiques dont voici quelques exemples : donc, ainsi, puis, alors, par conséquent, ensuite, de plus, enfin ... / car, parce que, dû au fait que, ...
Par exemple : montrons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, puisque pour tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ (car $0 < k \leqslant t \leqslant k+1$ puis car la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$).
Alors, par croissance de l'intégrale, comme $k < k+1$: $\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt = \frac{1}{k}$
D'où la proposition demandée (ou CQFD "ce qu'il fallait démontrer").

Une rédaction du type :
X $\qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$
X $\qquad \frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt = \frac{1}{k}$
est évidement interdite !

2.2.4 Une différence essentielle !

Regardons maintenant 2 énoncés :

1. n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair.
2. n est pair donc n^2 est pair

Ces énoncés sont fondamentalement différents : le premier est **un** énoncé logique que l'on suppose vraie : "si un entier n est pair alors n^2 sera pair", le second est formé de deux énoncés logiques, relié par un connecteur logique pour signaler que la véracité du second provient de celle du premier.

Mais surtout, dans le premier, rien n'est dit sur le fait que n est pair (et d'ailleurs sur le fait que n^2 est pair) : on signale seulement que si n est pair alors n^2 le sera aussi.
Alors que dans la seconde proposition, on affirme que n est pair et que cela entraîne que n^2 l'est aussi. On aurait plutôt dû dire : n est pair, et comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, k est pair $\Rightarrow k^2$ est pair, alors n^2 est pair.

Le symbole $\Rightarrow$ ne signifie **pas** "donc". Le symbole $\Leftrightarrow$ (ou le "ssi") ne signifie **pas** "c'est à dire".

Il semble très vraisemblable que les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ apparaissent lors d'énoncés, et que les mots "donc" et "c'est à dire" apparaissent lors de démonstration.

Exemple 2.1. J'affirme la proposition $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, n est premier $\Rightarrow n+1$ n'est pas premier.
En effet, soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ tel que n soit premier.
Donc n est impair (car $n \neq 2$) et donc $n+1$ est pair, ainsi $n+1$ n'est pas premier.

2.2.5 Les ensembles

Un ensemble peut être naïvement définit par une "collection d'objets" (même si cela cause pas mal de problème, nous nous contenterons de cette définition).

Il y a plusieurs manières de définir un ensemble :

1. En listant ces éléments, que l'on "rassemble par des accolades" : par exemple : "on note $E = \{-2, \pi, e^3\}$".
2. Par selection parmi un ensemble plus grand, selon une propriété : par exemple : "on note $E = \{x \in \mathbb{Q}$ tel que $3x^2 \in \mathbb{N}\}$".
3. Par image directe par une transformation : par exemple : "on note $E = \{2n+1$ tel que $n \in \mathbb{N}\}$".
4. Par union, intersection, ... d'autres ensembles.

Attention : Les accolades sont caractéristiques des ensembles, et ne peuvent pas être remplacées par des parenthèses. Par exemple, lorsque je décris l'ensemble des solutions d'une ou plusieurs équations par : $\{1,2\}$ j'entends qu'il s'agit d'un ensemble contenant deux éléments : 1 et 2. Mais lorsque j'écris $(1,2)$, je ne parle pas d'un ensemble. D'ailleurs si je veux (par exemple dans le cas d'un système d'équations à 2 inconnues) signaler que seul le couple $(1,2)$ est solution alors je donnerai $\{(1,2)\}$ comme ensemble de solutions.
Enfin, vous veillerez à ne pas confondre le symbole $\subset$ et le symbole $\in$.

2.3 Des modèles de démonstrations

2.3.1 Montrer un "pour tout ..."

Pour montrer une proposition du type "$\forall x \in E$, montrer $P(x)$", on raisonnement de la manière suivante :

Soit $x \in E$, montrons $P(x)$: (*Introduction de la variable*)
...
... (*corps de la preuve*)
...

Exemple 2.2. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $(x+y)^2 \geqslant 4xy$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $y \in \mathbb{R}$, montrons $(x+y)^2 \geqslant 4xy$:
En effet, $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ et comme $x^2+2xy+y^2 \geqslant 4xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geqslant 0$, et comme $x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2 \geqslant 0$ alors $x^2+2xy+y^2 \geqslant 4xy$.

Vous remarquerez que dire "$x^2+2xy+y^2 \geqslant 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geqslant 0$" ne suffit pas, il faut aussi signaler que $(x-y)^2 \geqslant 0$ est vraie (et donc, par équivalence, $x^2+2xy+y^2 \geqslant 4xy$ (sous entendu est vraie)

Exemple 2.3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $sin(x+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\frac{sin(x)+cos(x)}{2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, comme pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $sin(a+b) = sin(a)cos(b)+sin(b)cos(a)$ alors :

$$sin(x+\frac{\pi}{4}) = sin(x)cos(\pi/4)+sin(\pi/4)cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}cos(x) = \sqrt{2}\frac{sin(x)+cos(x)}{2}$$

2.3.2 Montrer l'existence d'un objet

> Pour montrer une proposition du type "montrer qu'il existe $x \in E$, tel que $P(x)$", on cherche tout simplement un $x_0 \in E$ qui vérifie $P(x_0)$.

Attention : on pensera à vérifier la condition $x_0 \in E$.
De plus, une stratégie de recherche sera détaillé dans la partie analyse synthèse.

Exemple 2.4.

1. Soit E un ensemble. On rappelle que $P(E)$ est l'ensemble des parties de E. Montrer qu'il existe $A \in P(E)$ tel que $\bar{A} = \emptyset$.
   On pose $A_0 = E$ alors $A_0 \in P(E)$ et $\bar{A_0} = \emptyset$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 \geqslant x$.
   Soit $x \geqslant 0$, on pose $n_0 = \lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1$ ($\sqrt{x}$ est bien définie car $x \geqslant 0$).
   On rappelle que pour tout $y \in \mathbb{R}$ alors $\lfloor y \rfloor$ est appelée partie entière de y, il s'agit d'un entier tel que $\lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$.
   Ainsi $n_0 \in \mathbb{N}$, et $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \leqslant \sqrt{x} < \lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1 = n_0$ et donc, par croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ **sur** $\mathbb{R}_+$, $(\lfloor \sqrt{x} \rfloor)^2 \leqslant (\sqrt{x})^2 = x < n_0^2$.
   On a donc trouvé $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0^2 \geqslant x$ (vous vous convaincrez (je l'espère) que, soit $a, b \in \mathbb{R}$, si $a > b$ alors $a \geqslant b$).

2.3.3 Montrer l'unicité d'un objet.

> Pour montrer une proposition du type "montrer qu'il existe **au plus** un élément $x \in E$, tel que $P(x)$", on raisonne de la manière suivante :
>
> Soit $x, x' \in E$, tel que $P(x)$ et $P(x')$ (sous entendu soient vraies), montrons alors que $x = x'$:
> ...
> ... (*corps de la preuve*)
> ...
> Donc $x = x'$

Remarques : Rien n'est dit ici sur l'existence de tels x et x'.
La proposition peut aussi être formulé de la manière suivante : "montrer l'unicité de $x \in E$, tel que $P(x)$".

Exemple 2.5.

1. Montrer l'unicité de $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^{x+1} = 2$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant x < n+1$.
   Il s'agit de montrer ici l'existence ET l'unicité.
   L'existence est admise et sera faite en classe : il s'agit de l'existence de la partie entière de x.
   Montrons l'unicité : soit $n, n' \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant x < n+1$ et $n' \leqslant x < n'+1$.
   Alors $-n'-1 < -x \leqslant -n'$ et donc $n-n'-1 < 0 < n+1-n'$ et donc $-1 < n'-n < 1$ et comme $n'-n \in \mathbb{N}$ alors $n'-n = 0$ et donc $n = n'$.

2.3.4 Montrer une implication, montrer une équivalence

Pour montrer une proposition du type "montrer que "proposition A" implique "proposition B" (ou encore $A \Rightarrow B$ ou encore : "si A alors B"), on raisonne de la manière suivante :

Supposons que "proposition A" soit vraie, montrons "proposition B" :

...

... (*corps de la preuve*)

...

Donc "proposition B" est vraie.

Remarque : Rappel (cf partie 3) : "$A \Rightarrow B$" ne signifie PAS "A donc B".
On veillera à ne pas se tromper dans la suposition de départ.

Exemple 2.6. Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}$, n est pair implique n^2 est pair.
(on rappelle que : $\forall z \in \mathbb{Z}$, z est pair si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2k$).
Soit $n \in \mathbb{Z}$, supposons que n est pair.

Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$ et donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et donc il existe $K \in \mathbb{Z}$ (ici $K = 2k^2$) tel que $n^2 = 2K$ et donc n^2 est pair.

Pour montrer une proposition du type "montrer que "proposition A" est équivalent à "proposition B" (ou encore $A \Leftrightarrow B$ ou encore : " A si et seulement (ssi) B"), deux types de raisonnement sont possible :

1. On montre que $A \Rightarrow B$ ET $B \Rightarrow A$ (raisonnement par double implication).
   Cela donne :

   Montrons que $A \Rightarrow B$:
   Supposons que A soit vraie, montrons B :
   ...
   ... (*corps* 1 *de la preuve*)
   ...
   Donc B est vraie. Ainsi $A \Rightarrow B$.
   Montrons que $B \Rightarrow A$:
   Supposons que B soit vraie, montrons A :
   ...
   ... (*corps* 2 *de la preuve*)
   ...
   Donc A est vraie. Ainsi $B \Rightarrow A$.
   Conclusion : $A \Leftrightarrow B$.

2. On montre que $A \Leftrightarrow B$ "directement", en utilisant une "chaîne d'équivalence"..
   Cela donne :

   $$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow A_1 && \text{car "..."} \\ &\Leftrightarrow A_2 && \text{car "..."} \\ &\quad \dots \\ &\Leftrightarrow B && \text{car "..."} \end{aligned}$$

   Ainsi $A \Leftrightarrow B$.

Remarque : Attention, dans le second cas, chaque équivalence vous engage, dans le sens direct ET le sens réciproque, que vous devrez justifier à chaque fois.
Dans le premier cas, soyez conscient de ce que vous démontrez et de ce que vous voulez démontrer : ceux ci sont différents dans les 2 étapes de la preuve.

Exemple 2.7. Montrons que $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^2 = a^2+b^2 \Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$.
Soit $a,b \in \mathbb{R}$.
Montrons que $a=0$ ou $b=0 \Rightarrow (a+b)^2 = a^2+b^2$. Supposons que $a=0$ ou $b=0$.
Soit $a=0$ et alors $(a+b)^2 = b^2 = a^2+b^2$, soit $b=0$ et alors $(a+b)^2 = a^2 = a^2+b^2$. Dans les deux cas, $(a+b)^2 = a^2+b^2$.

Montrons que $(a+b)^2 = a^2+b^2 \Rightarrow a=0$ ou $b=0$. Supposons que $(a+b)^2 = a^2+b^2$.
Alors $a^2+b^2+2ab = a^2+b^2$ et donc $2ab=0$ et donc $ab=0$, et ainsi $a=0$ ou $b=0$.

Conclusion : $a=0$ ou $b=0 \Rightarrow (a+b)^2 = a^2+b^2$.

Remarque : la démonstration par "chaîne d'équivalences" est plus simple ici : soit $a,b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^2 = a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab = a^2+b^2 \Leftrightarrow 2ab=0 \Leftrightarrow ab=0 \Leftrightarrow a=0 \ ou \ b=0$$

(par les règles classiques sur les équivalences)

Exemple 2.8. Montrons que $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$.
Soit $x,y \in \mathbb{R}$.
Montrons que $x=y=0 \Rightarrow x^2+y^2=0$. Supposons que $x=y=0$ alors trivialement $x^2+y^2=0$.

Réciproquement, montrons que $x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$. Supposons que $x^2+y^2=0$.
Ainsi $\underbrace{x^2}_{\geqslant 0} = \underbrace{-y^2}_{\leqslant 0}$ et donc x^2 est à la fois positif ou nul et négatif ou nul et donc $x^2=0$ et donc $x=0$ et donc (comme $x^2=-y^2$) alors $y=0$.

Conclusion : $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$.

Exemple 2.9. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Montrons que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)=0$.
2. Il existe $x,y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant 0$ et $f(y) \geqslant 0$.
3. Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Pour cela, on peut montrer que $(1) \Leftrightarrow (2)$ et $(2) \Leftrightarrow (3)$. OU ALORS, on peut montrer une "chaîne d'implication" du type $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ (ou toute chaîne partant d'une proposition, passant par toutes les propositions, et finissant par la proposition de départ).
Montrons donc $(2) \Rightarrow (1)$ et $(1) \Rightarrow (3)$ et $(3) \Rightarrow (2)$.
Supposons (2) : ainsi il existe $x,y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant 0$ et $f(y) \geqslant 0$.
Or la fonction f est continue sur $[x,y]$ (supposons $x \leqslant y$, sans perte de généralité (c'est à dire que le fait que supposer $y \leqslant x$ ne change pas la démonstration). De plus, $0 \in [f(x), f(y)]$, donc par le TVI, il existe $c \in [x,y]$ tel que $f(c)=0$, et ainsi la proposition (1) est vraie.
Supposons maintenant que (1) est vraie, ainsi il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)=0$. Par continuité de f en x, $\lim_{t \to x} f(t) = f(x) = 0$, ainsi (3) est vraie.
Supposons enfin (3), ainsi il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Mais par continuité en a de f, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = 0$ et donc il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant 0$ $(x=a)$ et il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) \geqslant 0$ $(y=a)$ donc (2) est vraie.
Ainsi les trois propositions sont équivalentes.

2.3.5 Montrer une inclusion

On considère un ensemble E et deux sous ensembles C et D de E. Pour montrer une proposition du type "montrer que $C \subset D$, on raisonne de la manière suivante :

Soit $x \in C$, montrons $x \in D$:
...
... (*corps de la preuve*)
...
Ainsi $x \in D$, et donc $C \subset D$.

Remarque : Ce raisonnement est trivial, car la définition de la proposition "$C \subset D$" est : $\forall x \in C, x \in D$. Vous constaterez que montrer $C \subset D$ revient à montrer une implication : pour tout $x \in E$, $x \in C \Rightarrow x \in D$.

Exemple 2.10. On considère les ensembles suivants : $A = \{z \in \mathbb{C}\ tel\ que\ |z| = 1\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C}\ tel\ que\ il\ existe\ \theta \in [0, 2\pi]\ tel\ que\ z = e^{i\theta}\}$, montrons que $A \subset B$.
Soit $z \in A$. Ainsi $z \in \mathbb{C}$, ainsi il existe $r \geqslant 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $z = re^{i\theta}$.
Or comme $|z| = r = 1$ alors il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $z = e^{i\theta}$ ainsi $z \in B$.

Exemple 2.11. On considère les ensembles suivants : $A = \{f \in C^0(\mathbb{R})\ tel\ que\ \forall x \in \mathbb{R}\ \int_0^x f(t)\,dt = e^{x^2}\}$ et $B = \{f \in C^0(\mathbb{R}_+)\ tel\ que\ f\ est\ positive\ sur\ \mathbb{R}_+\}$. Montrons que $A = B$.
Soit $f \in A$, ainsi $f \in C^0(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f(t)\,dt = e^{x^2}$.
Mais comme f est continue sur $\mathbb{R}$, f admet une primitive sur $\mathbb{R}$ que l'on note F.
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) - F(0) = e^{x^2}$ et donc comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{x^2}$ aussi, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x) = 2xe^{x^2}$.
Ainsi f est positive sur $\mathbb{R}_+$ et $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ (trivialement). Ainsi $f \in B$.

2.3.6 Montrer une égalité d'ensemble

On considère un ensemble E et deux sous ensembles C et D de E. Pour montrer une proposition du type "montrer que $C = D$", deux types de raisonnement sont possible :

1. On montre que $C \subset D$ ET $D \subset C$ (raisonnement par double inclusion).
   Cela donne :

   Montrons que $C \subset D$:
   Soit $x \in C$, montrons $x \in D$:
   ...
   ... (*corps* 1 *de la preuve*)
   ...
   Donc $x \in D$. Ainsi $C \subset D$.
   Montrons que $D \subset C$:
   Supposons que $x \in D$ soit vraie, montrons $x \in C$:
   ...
   ... (*corps* 2 *de la preuve*)
   ...
   Donc $x \in C$. Ainsi $D \subset C$.
   Conclusion : $C = D$.

2. On montre que $C = D$ "directement", en montrant que $\forall x \in E$, $x \in C \Leftrightarrow x \in D$, utilisant une "chaîne d'équivalence".

Exemple 2.12. On considère l'ensemble suivant : $A = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}_-,\ \ x \geqslant y\}$, montrons que $A = \mathbb{R}_+$.
Soit $x \in A$. Ainsi pour tout $y \in \mathbb{R}_-$, $x \geqslant y$, en particulier $x \geqslant 0$. Donc $x \in \mathbb{R}_+$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$, montrons que pour tout $y \in \mathbb{R}_-$, $x \geqslant y$: c'est trivial.

Exemple 2.13. Si E est un ensemble, montrons (l'exemple du début), $\forall A \in P(E), \forall B \in P(E), A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B$.

Soit $A \subset E$, soit $B \subset E$, montrons $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ par double inclusion.
Supposons que $A \cap B = A$, montrons $A \subset B$:
Soit $x \in A$, donc $x \in A \cap B$, donc $x \in B$. Ainsi $A \subset B$.
Supposons maintenant que $A \subset B$, montrons que $A \cap B = A$ (aussi par double inclusion) :
Soit $x \in A \cap B$ alors $x \in A$. Ainsi $A \cap B \subset A$
Soit $x \in A$ alors $x \in B$ car $A \subset B$. Ainsi $A \subset A \cap B$
Ainsi $A \cap B = A$ Conclusion : $\forall A \in P(E), \forall B \in P(E), A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B$

2.3.7 Le raisonnement par récurrence simple

On considère une proposition logique dépend d'un entier n, que l'on notera P_n.
Le raisonnement par récurrence repose sur le principe suivant, admis ; :

$$\text{Si} \quad \underbrace{P_0 \text{ est vraie}}_{\text{"Initialisation"}} \quad \text{et si} \quad \underbrace{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n \text{ est vraie} \Rightarrow P_{n+1} \text{ est vraie}}_{\text{"Hérédité"}} \quad \text{alors} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n \text{ est vraie.}$$

Pour montrer par récurrence simple " $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n ", on raisonne de la manière suivante :
En premier lieu, on énonce la proposition P_n ! ! !
Initialisation : ... (*on montre que* P_0 *est vraie*)
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie, montrons P_{n+1}.
... (*on montre que* P_{n+1}*, en supposant que* P_n *est vraie.*)
Conclusion : on résume le raisonnement fait : par exemple "comme P_0 est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ alors par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Il est possible de démontrer que pour tout $n \geqslant n_0$, P_n est vraie. Il suffit de montrer P_{n_0} est vraie pour l'initialisation et on montre que pour tout $n \geqslant n_0$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ pour l'hérédité.
Remarque : Vous constaterez que l'on montre, dans l'hérédité, "$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$" et PAS "$(\forall n \in \mathbb{N}\ P_n) \Rightarrow P_{n+1}$" (d'ailleurs P_{n+1} n'aurait plus de sens car la variable n ne vit ici que pour introduire la proposition P_n).
Ainsi pour montrer "$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$", on considère un entier n quelconque ("soit $n \in \mathbb{N}$), puis on montre $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ (on suppose P_n et on montre P_{n+1}).

Exemple 2.14. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$: "pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$".
I : $P(0)$ est vraie car pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(1+x)^0 = 1 \geqslant 1 = 1+0x$
H : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que la propriété est vraie au rang n et montrons la au rang $n+1$:
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $1+x > 0$ alors $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$.
Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
Ccl : comme $P(0)$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ alors par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exemple 2.15. Montrons que, pour tout $n \geqslant 3$, il existe $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_1 < a_2 < ... < a_n$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1$.

Pour tout $n \geqslant 3$, posons $P(n)$: "il existe $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_1 < a_2 < ... < a_n$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1$".

I : $P(3)$ est vraie car $\frac{1}{6} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$
H : Soit $n \geqslant 3$, supposons que la propriété est vraie au rang n et montrons la au rang $n+1$:
Ainsi il existe $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_1 < a_2 < ... < a_n$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1$.

Trouvons $b_1, ..., b_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ tel que $b_1 < b_2 < ... < b_{n+1}$ et $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{b_k} = 1$:
On remarque tout d'abord que $\frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_n(a_n+1)} = \frac{a_n+1}{a_n(a_n+1)} = \frac{1}{a_n}$.
On pose alors pour tout $k \in [[0, n-1]]$, $b_k = a_k$ et $b_n = a_n + 1$ et $b_{n+1} = a_n(a_n+1)$.
Ainsi $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{b_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_n(a_n+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1$.
Enfin, $b_1 = a_1 < b_2 = a_2 < ... < b_{n-1} = a_n < b_n = a_n + 1 < b_{n+1} = a_n(a_n+1)$ car $a_n > 1$ car pour tout $k \in [[1, n]]$, $\frac{1}{a_k} > 0$; ainsi $\frac{1}{a_n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1$ donc $a_n > 1$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
Ccl : comme $P(3)$ est vraie et que pour tout $n \geqslant 3$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ alors par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 3$.

2.3.8 Le raisonnement par l'absurde

Le principe du raisonnement par l'absurde est très simple : on suppose qu'une proposition P est fausse, on en déduit une absurdité, et ainsi la proposition P est vraie.

Pour montrer une proposition P par l'absurde, on rédige de la manière suivante :
On suppose que P soit fausse :
...
... (*on cherche une contradiction, possiblement que P soit vraie par exemple*)
...
C'est absurde, donc P est vraie.

Remarque : Il faut être précis lorsque l'on suppose que P est fausse (cela revient à supposer que *nonP* est vraie. On se rappellera les négations suivantes : si on note $\neg P$ la négation de P :
$\neg(A \text{ } et \text{ } B) = \neg A \text{ } ou \neg B$, $\neg(A \text{ } ou \text{ } B) = \neg A \text{ } et \neg B$, $\neg(A \Rightarrow B) = A \text{ } et \neg B$
$\neg(\forall x, P(x)) = \exists x, \neg P(x)$, $\neg(\exists x, P(x)) = \forall x, \neg P(x)$

Remarque : Vous remarquerez que ce raisonnement se déroule de manière semblable à celui de la preuve d'une implication, au différences suivantes près : on suppose que P est faux en premier lieu (cela peut être un avantage lorsque $\neg P$ semble plus "simple" que P), et en second lieu, on ne connait pas la "destination" : on cherche juste une contradiction.

Exemple 2.16. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier :
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons par l'absurde qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+1} = k$. Ainsi $n^2 + 1 = k^2$ et donc $n^2 - k^2 = 1$ et donc $(n-k)(n+k) = 1$.
Or $n, k \in \mathbb{N}$ donc $n - k \in \mathbb{Z}$ et $n + k \in \mathbb{N}$ et donc (les seuls couples de deux entiers dont le produit fait 1 étant $(1,1)$ et $(-1,-1)$) $n - k = 1$ et $n + k = 1$ et donc $n - k = n + k$ et ainsi $k = 0$. Ainsi $n = 1$ et donc $\sqrt{2} = 0$ ce qui est absurde.
D'où : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Exemple 2.17. Soit A et B deux propositions logiques.

On suppose que A implique B.
Montrons que $\neg B$ implique $\neg A$.

On suppose $\neg B$, et on montre $\neg A$:

Supposons par l'absurde que $\neg A$ est faux c'est à dire que A est vraie :
Ainsi par la supposition de départ, comme A est vraie, alors B est vraie.
Ceci est absurde car on a supposé que $\neg B$ est vraie.

Ainsi par l'absurde, $\neg A$ est vraie.

D'où le résultat.

2.4 Quelques points dangereux

2.4.1 Les fonctions

Commençons par une série d'exemples de rédaction qui arracheront les yeux des différents correcteurs :

1. ✗ On considère la fonction $sin(x)$.
2. ✗ On considère la fonction $f(x) = sin(x)$ pour tout x.
3. ✗ La fonction $x \mapsto e^x$ est croissante (resp. continue ...) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Quelques exemples moins graves :

4. ✗ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(sin(x))' = cos(x)$.
5. ✗ $x \to x^2 + 1$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2.4.2 Introduire une fonction, et parler de ces propriétés

Parlons en premier lieu des erreurs 1 et 2 : **une fonction est un objet que l'on définit proprement lorsque l'on donne un ensemble de départ, un ensemble d'arrivé et un procédé de transformation qui à tout élément de l'ensemble de départ associe un et un seul élément de l'ensemble d'arrivé**.
Néanmoins, il est possible, lorsque les ensembles de départ et d'arrivé sont implicites (souvent $\mathbb{R}$), il est possible de donner juste le procédé de transformation.
Voici trois bonnes manières de définir une fonction :

1) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = (x, x^2)$

2) Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{C}^2 \\ n & \mapsto & (n^2 + i, 1 + in^2) \end{array} \right.$ (vous veillerez à remarquer les différences entre les deux flèches). 3) Soit $f : x \mapsto e^{x^2 + sin(x)}$ (implicitement, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Dans tous les cas $f(x)$ n'est pas une fonction ! (ni $f(t)$, ni e^t, ni ...)
D'ailleurs vous remarquerez que dans chacune des trois définitions, la variable x (ou n) est muette et pourrait être remplacée par n'importe quelle autre variable (même si certaines variables sont plus lisibles que d'autres par habitude).
Ainsi dire "$f : x \mapsto x^2 + 1$ est une fonction respectant une propriété pour tout $x \in ....$" n'a pas de sens.
On dira plutôt que f respecte cette propriété sur un ensemble E, par exemple : la fonction $t \mapsto e^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour l'exemple 5 *: il s'agit juste de la mauvaise flèche.*

2.4.3 Dérivation

Revenons sur l'exemple 4 : il est important de se rappeler que la dérivé d'un nombre n'a pas particulièrement de sens, ce qui a été définie dans vos cours, c'est le nombre dérivée associé à une fonction f en un point a : que l'on note $f'(a)$; de plus, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à a associé $f'(a)$ est appelée fonction dérivée de f

et est noté f'.

Ainsi les notations $(f(x))'$ et $(sin(x))'$ n'ont pas de sens, contrairement à $f'(x)$ et $sin'(x)$.
Néanmoins, dans le cas où, contrairement à la fonction f et la fonction sin, la fonction manipulée (ou les sous fonctions manipulées) n'a pas d'expression aussi compacte, il est conseillé d'introduire la fonction.
Par exemple : si on considère la fonction $f : x \mapsto e^{x^2+sin(x)}$ (on pose $g : x \mapsto x^2+sin(x)$) alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g'(x)f'(g(x)) = (2x+cos(x))e^{x^2+sin(x)}$.

2.4.4 Les équations et le discriminant

Pour finir, je vous laisse avec un exemple classique et quelques questions rhétoriques sur un rédaction traditionnelle mais complètement absurde :

X On résout $x^2-5x+6=0$: $\Delta = 25-4\times 6 = 1$ donc deux solutions $x=3$ et $x=2$.

1. C'est quoi Δ et en quoi cela apporte t il une justification ?
2. Ce "donc" est il la signification que $X^2-5x+6=0$ implique $x=3$ et(ou ?) $x=2$? Ou est il la signification du fait que $\Delta = 1$ entraîne le fait que $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=3$ ou $x=2$?
3. Comme vu ci-dessus : "et" ? ou "ou" ?
4. La solution $x=2$ a t elle un sens ? (solution ne désigne t il pas un élément de l'ensemble et pas une autre équation ?)

Allez, je suis sympa, je vous propose deux rédactions convenables pour la route :
On considère l'équation $x^2-5x+6=0$, cette équation est de discriminant $25-24=1$ qui est strictement positif, et donc cette équation admet deux solutions qui sont 2 et 3.
Une autre méthode (pourquoi se compliquer ?) : $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=3$ (résolution du second degré faite au brouillon).